17. Juni 2002

Berechnen Sie sämtliche Nullstellen der Funktion: $\cosh(\sqrt{z})$

Lösung:

$$\cosh(\sqrt{z})=0 \Rightarrow \frac{e^{\sqrt{z}}+e^{-\sqrt{z}}}{2}=0 \Rightarrow e^{2\sqrt{z}}=-1=e^{j\pi(2k+1)} \Rightarrow z=-\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2$$

Man entwickle die Funktion $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}$ in eine Taylor'sche Reihe um $x_0=\frac{1}{2}$. Für welche Werte von x ist die Reihe konvergent?

Lösung:

$$f\left(y+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{y-\frac{3}{2}}-\frac{1}{y-\frac{1}{2}}=\frac{2}{1-2y}-\frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{2y}{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)y^n$$

$$|y|<\frac{1}{2} \Rightarrow f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n+1}-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)^n, 0<x<1$$

Man erläutere den Begriff „gleichmäßige Konvergenz“ für Funktionenreihen und dessen Bedeutung.

Lösung:

Eine Reihe $s(x)=\sum f_n(x)$ mit den Partialsummen s_n heißt auf ein Intervall I gleichmäßig konvergent mit der Summe $s(x)$, wenn $\forall \varepsilon>0 \Rightarrow \exists n_0 \in N \; mit \; n>n_0 \Rightarrow \sup_{x\in I}|s_n(x)-s(x)|<\varepsilon$.

Die Bedeutung der gleichmäßigen Konvergenz besteht darin, dass die Operationen $\lim_{x\to 0}$, $\frac{d}{dx}$ und $\int_a^x$ mit der Summation $\sum_{n=1}^{\infty}$ vertauscht werden darf.

Man formuliere den Fixpunktsatz von Banach.

Lösung:

Es sei $f:[a,b]\to[a,b]$ auf [a,b] Lipschitz-stetig mit einer Lipschitz-Konstanten L<1. Dann hat f in [a,b] genau einen Fixpunkt. Für $x_0 \in f(x_{n-1})$ konvergiert, die durch Iteration gegebene Folge (x_n) gegen diesen Fixpunkt.

Falls Ihr weitere Fragen gesammelt habt, schickt sie mir bitte an studenten@entner.net. Danke!