

Mathematik 2 f. ET (StPl 2000)

26. Juni 2002

1. Man löse die Anfangswertaufgabe

$$y' = \frac{y(1-x)}{x(1-y)}, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

2. Man rechne den Differentialausdruck

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

auf die Koordinaten $u = x + y$, $v = x - y$ um.

3. Man formuliere den Satz über implizite Funktionen.

4. Was ist eine diagonalisierbare Matrix? Welche Möglichkeiten bestehen zur Feststellung der Diagonalisierbarkeit?

Antworten:

1. $\frac{1-y}{y} dy = \frac{1-x}{x} dx \Rightarrow \int_{1/2}^y \frac{1-\eta}{\eta} d\eta = \int_{1/2}^x \frac{1-\xi}{\xi} d\xi \Rightarrow \ln|y| - \ln \frac{1}{2} - y + \frac{1}{2} = \ln|x| - \ln \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2} \Rightarrow \ln \left|\frac{y}{x}\right| = y - x \Rightarrow ye^{-y} = xe^{-x}.$

2. $f_x = f_u u_x + f_v v_x = f_u + f_v$, $f_{xx} = f_{uu} u_x^2 + f_{uv} u_x v_x + f_{vu} v_x u_x + f_{vv} v_x^2 = f_{uu} + 2f_{uv} + f_{vv}$; $f_y = f_u u_y + f_v v_y = f_u - f_v$, $f_{yy} = f_{uu} u_y^2 + f_{uv} u_y v_y - f_{vu} v_y u_y - f_{vv} v_y^2 = f_{uu} - 2f_{uv} + f_{vv} \Rightarrow f_{xx} - f_{yy} = 4f_{uv}.$

3. Sei $F(x, y) = 0$ in einer Umgebung der Stelle (x_o, y_o) definiert mit stetigen partiellen Ableitungen F_x, F_y und $F(x_o, y_o) = 0$. Gilt $F_y(x_o, y_o) \neq 0$, so gibt es in einer Umgebung $U(x_o)$ genau eine Funktion $y = f(x)$ mit (i) $F(x, f(x)) = 0$ für $x \in U(x_o)$, (ii) $y_o = f(x_o)$, (iii) die Funktion f ist differenzierbar in x_o , es gilt $F_x(x_o, y_o) + F_y(x_o, y_o)f'(x_o) = 0$.

4. Eine (quadratische) Matrix \mathbf{A} heißt diagonalisierbar, wenn eine reguläre Matrix \mathbf{X} existiert, sodaß $\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}$ eine Diagonalmatrix ist. Notwendig und hinreichend für Diagonalisierbarkeit ist die Bedingung, daß die algebraische Vielfachheit jedes Eigenwertes mit dessen geometrischer Vielfachheit übereinstimmt. Ist im Besonderen eine Matrix \mathbf{A} normal ($\mathbf{A}\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^H\mathbf{A}$), so ist \mathbf{A} diagonalisierbar.

Falls Ihr weitere Fragen gesammelt habt, schickt sie mir bitte an studenten@entner.net. Danke!