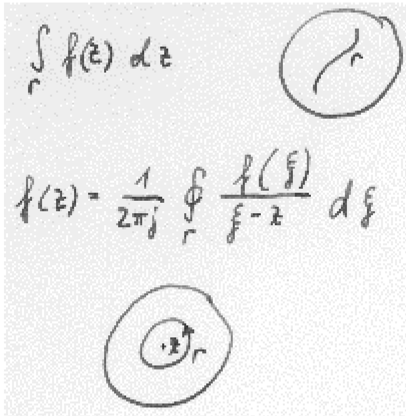
Prüfungsprotokoll der Mathemathik 3 - Prüfung (mündlich) vom 14.5.2003

Kandidat 1:

Frage 1: Erzählen Sie mir was über den Causchyschen Integralsatz.

Der Kandidat war leider sehr nervös und man konnte ihn leider nur schlecht verstehen.



Kandidat: Beim Cauchyschen Integralsatz geht es um ein Integral über die Kurve Gamma. Wenn holomorph => wegunabhängig.

Prof. Langer: Ok, also wir haben ein Gebiet. Gebiet zeichnen. Sie sollen ja lernen so etwas zu erklären. Dann ist eine Kurve Gamma gegeben.

Kandidat: Dann hängt dieses Integral nur mehr vom Anfangs... ab.

Prof. Langer: Und was ist mit der Funktion f? Von der haben wir noch nicht gesprochen. Wir haben von einer Kurve und von einem Gebiet gesprochen. Jetzt ist gegeben in dem Gebiet eine Funktion f, die soll dort holomorph sein. Ok, und dann ist die Aussage dieses Integralsatzes.

Kandidat: Dass das Integral nicht mehr vom Weg, sondern nur mehr vom Anfangs- und Endpunkt abhängt.

Prof. Langer: Ja, ist im Prinzip richtig, nur wir brauchen noch eine kleine Voraussetzung über das Gebiet. Ein Gebiet ist nämlich auch so was (ein Ring).

K: Einfach zusammenhängend

P: Einfach zusammenhängend muss es sein, es darf keine Löcher haben. Und was bedeutet das für ein Integral über die geschlossene Kurve?

K: Das es gleich 0 ist.

P: Ja, und daraus kann man dann die Causchyschen Integralformeln ableiten. Wie sehen denn die so aus, oder was machen die?

K: (schreibt Formel)

P: Das Kringel hätten sie ruhig lassen können, jetzt haben wir ein neues Gamma, jetzt ist nicht mehr das Gamma. Ja, ein j fehlt noch. Und wie sieht jetzt Gamma aus? Zeichnen sie einmal so ein Gamma, was sie jetzt brauchen.

K: (zeichnet)

P: So, und Orientierung, ..., eine Kurve hat eine Orientierung, ja.

K: Es muss immer innerhalb liegen.

P: und wo muss z liegen?

K: z muss im Inneren liegen.

P: Und wenn z außerhalb liegt, was wird da aus dem Integral? (Kandidat überlegt) Schauen sie sich den Integranten an! Wenn z außerhalb liegt, was ist denn dann mit dem Integranten? Die einzige Singularität hat doch der Integrant, wenn Zeta gleich z ist, nicht wahr?

K: Ja, ist klar.

P: So, und wenn z also irgendwo außerhalb liegt, dann ist der Integrant außerhalb und da ...

K: ist es null.

P: Ja, da ist es null. Können Sie das anwenden, was sie gerade gesagt haben?

K: Ja

<u>Frage 2: Schwingungsgleichung, D'Alembertsche Methode?</u>

P: Was haben wir da im allgemeinen für Rand- oder Anfangsbedingungen? Wie sehen die aus? Wir sind auf einem Intervall auf der x-Achse, ja, ..., und wo soll t sein? Ja, und u(x,t) ist die gesuchte Funktion.

K: u(0,t) z.B. muss gegeben sein.

P: Ja, erst mal die Frage: Wo soll x und t liegen? X liegt zwischen ...

K: x liegt zwischen 0 und l.

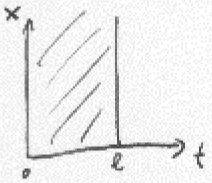
P: Z.B., ja, 0 und l. Das heißt also sie wählen ein reguläres Problem (endliches Intervall). Sie hätten genauso sagen können, wir nehmen x von 0 bis unendlich, nicht wahr? Aber das wäre vielleicht schwieriger geworden. Also sie sind auf dem Intervall 0 bis l. Das sollte man dazu sagen. Und t, wo soll das t sein?

K: t auch zum Zeitpunkt 0, bzw. ...

P: Ich frage jetzt nicht nach den Anfangsbedingungen, sondern in welchem Bereich wird das t im Allgemeinen liegen, wenn man die Gleichung so hat?

K: größer 0

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$



$u(x,t)$

$u(0,t) = 0$

$u(l,t) = 0$

$u(x,0) = f(x)$

$\dot{u}(x,0) = g(x)$

$\xi = x - ct \qquad x = \frac{\xi + \eta}{2}$

$\eta = x + ct \qquad y = \frac{\eta - \xi}{2c}$

$u_{\xi\eta}(\xi,\eta) = 0$

$u(x,t) = g(x-ct) + h(x+ct)$

P: t > 0, ja. In welchem Gebiet der x-t-Ebene suchen wir also die Funktion? Ja, in so einem Streifen. So und wir geben uns jetzt also Rand- und Anfangswerte vor. Das sind gerade die Werte von u auf den Grenzen dieses Streifens. So kann man das auch sehen, nicht wahr? Dann schreiben sie mal hin, dann haben wir einmal u(0,t). Was ist denn u? Eine Bedingung möchte ich sehen. U(0,t) soll sein gleich ...

K: 0

P: Z.B. 0, (Kandidat schreibt) machen sie auch null meinetwegen. Auf welchen Linien ist die Funktion jetzt null? (Kandidat schreibt) Es ist nicht falsch, aber ... Was sind denn das für Punkte 0 und t? t war irgendwie größer 0. Auf der ganzen Linie, ja klar. Und dort (?) ist es auch null. Und dann müssen wir es noch unten vorgeben auf 0 bis l, also als Anfangsbedingung. ... Ich meine jetzt auf dem Intervall für x gleich 0 bis l. Also u(x,0)= irgendeine Funktion, sagen wir f(x). Und was brauchen wir noch? Weil wir eine Gleichung zweiter Ordnung haben können wir noch ... ja, u-punkt (abgeleitet) angeben. Nein von x und 0 wieder. ... gleich g(x). So, was macht man mit der D'Alembertschen Methode?

K: Die substituiert zuerst einmal.

P: Ja

K: x ist gleich (schreibt) ... das wird dann substituiert.

P: Moment, also erst mal mit c^2 ist nämlich nicht die Substitution. Das ist nicht ganz ...

K: nur c

P: Naja, aber auch das Xi und Eta oder das Zeta und Eta, was immer das auch ist. Was führen sie für neue Variablen ein? Die hängen von x und t ab. Gut, man kann's auflösen bei ihnen, dann kommt man auch hin, aber sie können auch schreiben Xi=x-ct und Eta=... einfach nur so rum. Sie kommen dann auch hin. x-ct ... (Kandidat schreibt) ... Naja, schauen sie sich nocheinmal die Gleichungen an, die sie hingeschrieben haben. Also x=Xi-ct und was ist denn das zweite? Da steht t=eta+ct, das ist doch Quatsch. Wir führen zwei neue Variable ein. Die eine ist x-ct und die andere ist x+ct. Und da schreiben wir immer Xi=x-ct ... (Kandidat löscht weg und schreibt neu). In was geht dann die linke Seite, oder die Gleichung über? ... Xi und Eta sind die Variablen, ok. Aber wie sieht die Differentialgleichung aus, für das U? ... Das ist eine der Normalformen für die hyperbolische Differenzialgleichung, nämlich ... nein auf der rechten Seite wird null, da können sie nichts mehr groß hinschreiben. Was wird aus der linken Seite, ... wie sieht der Ausdruck für das groß U aus, der entsprechende Ausdruck? ... Das wird U(Xi,Eta) abgeben.

K: Ja

P: Malen sie hin: $U_{Xi,Eta}=0$ Man schreibt aber Xi und Eta immer an das U nicht in eine Klammer, weil sonst wird es ja zum Funktionssymbol. So, und die kann man integrieren, oder nicht? ... Was kommt raus, wenn wir es intergrieren? ... U nach Xi und Eta abgeleitet ist gleich null. Wie kann man das integrieren?

K: Das Ergebnis ist dann (schreibt) ... Es kommen dann zwei Funktionen heraus.

P: Ja, sie sagen es kommen zwei Funktionen raus. Wie müssten sie denn richtig sagen? ... Was sie jetzt hingeschrieben haben, was ist das?

K: Ergebnis, ... nein

P: Zunächst einmal die Lösung. Das ist u(x,t). Es kommen keine zwei Funktionen raus, sondern sie können zwei beliebige Funktionen wählen.

Frage 3: Was ist denn die Laplace-Transformation?

K: (schreibt Formel)

$$\mathcal{L}\{f(s)\} = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$|f(t)| \le C e^{vt}$$

P: Grenzen nicht vergessen! Was muss man voraussetzen, damit es existiert?

K: Das es nicht größer, als das exponentielle ...

P: Was heißt denn das für ein (?)

K: (schreibt Formel)

P: rechts muss t noch stehen. Und das wäre jetzt kleiner gleich einer Konstanten.

P: OK, eine 3

Kandidat 2:

Frage 1: Die allgemeine lineare, partielle Differentialgleichung:

K: (schreibt)

$$F\left(x_1, x_2, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots\right.$$

P: Nö, das ist die rechte Seite, wo wir dann alles reinstecken. Aber die entscheidenden Glieder, die eine quasilineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung praktisch beschreiben.

K: (schreibt)

$$A u_{xx} + 2B \cancel{u_{xy}} + C u_{yy} =$$

$$u_{xy}$$

P: Ja, jetzt kommt dieses F auf der rechten Seite, das interessiert nicht mehr. Wie finden wir die Differentialgleichung für die Charakteristik? Und was steht denn da, das mittlere Glied, was ist denn das? Wir haben 2. Ableitung nach x, dann haben wir ... => (2. gemischte Ableitung u_{xy} ist richtig). Das ist eine lineare Differentialgleichung! So, wie sieht die Differentialgleichung für die Charakteristik aus?

$$z(x,y) = 0$$

$$A z_x^2 + 2B z_{xy} + C z_y^2 = 0$$

$$A y'' - 2B y' + C = 0$$

K: Die Charakteristik, das ist ... (schreibt)

P: Nein, die sieht ...

K: Dann ist das der nächste Schritt

P: Nein, das ist auch nicht der nächste Schritt

K: Der nächste Schritt wäre das y strich zum Quadrat

P: Ja, und wie kommt man dazu? ... Die Charakteristiken sind also durch irgendwelche Gleichungen z(x,y)=0 gegeben. ... Wie sieht die Differentialgleichung für das z zunächst aus?

K: (schreibt)

P: Wie kommt man denn jetzt von dieser Zeile zu der nächsten, die sie angeschrieben haben?

K: Es ist hier die Funktion y implizit gegeben. z(x,y)=konst. Für konstante Werte sind das die Charakteristiken diese erste partielle Differentialgleichung und die Funktion ist dann eine Charakteristik, wenn sie dieser Differentialgleichung genügt.

P: Ja, sie müssen also dieses z(x,y) total nach x ableiten. Dann bekommt man zx + zyy' = 0, ...(?).

__Frage 2: Wie sieht denn die Wärmeleitungsgleichung aus?__

K: (schreibt) Stab der Länge l, ...

P: Und wie kann man die lösen? Was gibt es für Anfangs- und Randbedingungen zunächst?

K: Anfangs- und Randbedingungen sind, wenn es ein endliches Problem ist, sprich bei einer Stablänge l. ...

P: Schreiben sie die Randbedingungen hin.

K: (schreibt) Also ich habe hier die Randbedingungen und das sind dann die Anfangsbedingungen.

P: Wie kann man das Problem jetzt mit der Fourier'schen Methode lösen?

K: Ich mache einen Ansatz (schreibt), ... dann komme ich zu den Eigenwerten.

P: Machen sie es mal, setzten sie mal ein.

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0$$

$\boxed{\text{Stab}}$

0 l

$$u(0,t) = u_1(t) \qquad u(l,t) = u_2(t)$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$u = X(x) \cdot T(t)$$

$$u_t = T'(t) \cdot X(x)$$

$$u_{xx} = T(t)\, X''(x)$$

$$X(x) \cdot T'(t) - r^2 T(t) X''(x) = 0$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = a^2 \qquad \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

$$a^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \qquad \mu_1 = 0 \qquad X(0) = 0$$

$$a^2 X'' - \lambda X = 0 \qquad \mu_2 = 0 \qquad X(l) = 0$$

K: (schreibt) Dann kann ich das Ganze noch durch X und T multiplizieren (?).

P: Ja

K: Und dann kommt das (schreibt) heraus, ist gleich a Quadrat mal, ... Und jetzt kann ich z.B. den einen Parameter festhalten

P: Ja

K: dann ist die eine Seite konstant

P: Ja

K: und ich habe dann noch eine normale Differentialgleichung mit nur einer Unbekannten.

P: Ja, das setzten wir also gleich wie es jetzt dasteht irgendeiner Konstanten

K: Lambda. Und man geht dann so vor ... (unterbrochen)

P: Betrachten wir mal eine der beiden Gleichungen, die man erhält. Die rechte z.B. für die Funktion X. ... Schreiben sie es mal hin.

K: (schreibt)

P: Wie kann man die lösen, was machen wir denn da?

K: Man macht einen Ansatz und äh, ...

P: Was ist denn das für eine Differentialgleichung?

K: 2. Ordnung

P: Ok, linear oder nicht linear?

K: linear

P: Ja, schreiben sie einmal sie einmal als lineare Gleichung hin, sodass man erkennt, dass man sieht, dass sie linear ist.

K: (schreibt)

P: Was haben wir da für Randbedingungen?

K: Die Randbedingungen ...

P: Und zwar setzen sie mal $\mu 1(t)$ und $\mu 2(t)$ dort gleich null. ... Wie sehen denn dann die Randbedingungen für das X aus?

K: Die müssen auch für ... (schreibt, überlegt). Für $x=0$ ...

P: Für die Funktion X an der Stelle 0 ist gleich 0 und $X(l)$ auch gleich 0. Schreiben sie das mal hin.

K: (schreibt)

P: Was hat denn die Differentialgleichung denn jetzt für Lösungen? Wie findet man die Lamdas, sagen wir mal so.

K: Die Lambdas sind die Eigenwerte.

P: Die Eigenwerte, ja. Wie finden wir die?

K: Ich suche quasi eine ungerade Funktion, ...

P: Welcher Typ von Funktion kommt den hier raus? Die sollen also bei 0 verschwinden und bei l verschwinden und dazwischen, was wird denn das sein?

K: Eine Sinusreihe

P: Ja

Frage 3: Was sagt das Maximumprinzip für holomorphe Funktionen?

K: Ist eine Funktion in einem Gebiet D holomorph und gibt es in diesem Gebiet einen Funkionswert, der ein Maximum darstellt

P: an einer Stelle wird die Funktion betragsmäßig maximal

K: dann besagt das, dass die Funktion im ganzen Gebiet konstant ist. Gibt es einen Rand und ist die Funktion nicht konstant, dann nimmt die Funktion die Maxima auf dem Rand an.

P: Ich gebe ihnen einen Dreier.